TEORÍA DE LA MEDIDA

Complemento de la Sesión 05

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$

Cuando hablemos de intervalos de números reales, vamos a incluir tanto a los finitos como a los infinitos. Explícitamente, el conjunto de los intervalos de números reales está formado por todos los de los tipos siguientes:

1. Los intervalos con extremos a y b, de cualquier tipo, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

2. Los intervalos de la forma $[a, a]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞) y $[a, \infty)$, donde a es un número real cualquiera.

3. El intervalo $(-\infty, \infty)$.

De acuerdo con lo anterior, no consideraremos como intervalo al conjunto vacío.

Cuando los dos extremos de un intervalo sean números reales, diremos que el intervalo es finito; en caso contrario, diremos que es infinito.

Definición 1. *Por una celda en $\mathbb{R}^n$ se entenderá un conjunto de la forma $I_1 \times \cdots \times I_n$, donde $I_1, \cdots, I_n$ son intervalos en $\mathbb{R}$.*

Obviamente, si $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ entonces R es un conjunto acotado si y sólo si los intervalos $I_1, \cdots, I_n$ son finitos. De la misma manera, R es un conjunto abierto (resp. cerrado) si y sólo si los intervalos $I_1, \cdots, I_n$ son abiertos (resp. cerrados).

Denotaremos por $\mathcal{R}$ a la familia de celdas en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2 ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$). *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, la cual será denotada por $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, es la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ generada por $\mathcal{R}$. A los elementos de esa σ-álgebra los llamaremos borelianos de $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 1. *La σ-álgebra generada por la familia de celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$.*

Demostración

Sea $\mathcal{H}$ la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ generada por la familia de celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $U \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definamos la sucesión de intervalos $\left(J_k^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ y el intervalos J_k de la siguiente manera:

$$J_k = \begin{cases} (-\infty, x_k] & \text{si } k \notin U \\ \mathbb{R} & \text{si } k \in U \end{cases}$$

$$J_k^{(m)} = \begin{cases} (-\infty, x_k] & \text{si } k \notin U \\ (-\infty, m] & \text{si } k \in U \end{cases}$$

Se tiene:

$J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_1^{(m)} \times J_2^{(m)} \times \cdots \times J_n^{(m)}$.

Así que $J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n \in \mathcal{H}$.

Definamos $\mathcal{G} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

Por lo anterior, $I_1 \times \cdots \times I_n \in \mathcal{H}$, para cualquier celda $I_1 \times \cdots \times I_n$ donde $I_k \in \mathcal{G}$ para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

La idea de lo que sigue consiste en ir reemplazando, uno por uno, los intervalos $I_1, \cdots, I_n$ por borelianos en $\mathbb{R}$.

Definamos:

$\mathcal{H}_n = \{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : I_1 \times \cdots \times I_{n-1} \times B \in \mathcal{H}$ para cualquier celda $I_1 \times \cdots \times I_{n-1}$, donde $I_k \in \mathcal{G}\}$

Se puede mostrar fácilmente que $\mathcal{H}_n$ forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Además, por lo visto anteriormente:

$\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{H}_n$

Por lo tanto, $\mathcal{H}_n$ contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}$.

Sea ahora B_n un boreliano de $\mathbb{R}$ cualquiera y definamos:

$\mathcal{H}_{n-1} = \{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : I_1 \times \cdots \times I_{n-2} \times B \times B_n \in \mathcal{H}$ para cualquier celda $I_1 \times \cdots \times I_{n-2}$, donde $I_k \in \mathcal{G}\}$

Nuevamente, se puede mostrar fácilmente que $\mathcal{H}_{n-1}$ forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Además, por lo demostrado en el paso anterior:

$\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{H}_{n-1}$

Por lo tanto, $\mathcal{H}_{n-1}$ contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}$.

Continuando con este procedimiento, se obtiene que los conjuntos de la forma $I \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $I \in \mathcal{G}$ y $B_2, \ldots, B_n$ son borelianos cualesquiera de $\mathbb{R}$, pertenecen a $\mathcal{H}$.

Finalmente, si $B_2, \ldots, B_n$ son borelianos cualesquiera de $\mathbb{R}$ y definimos:

$\mathcal{H}_1 = \{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : B \times B_2 \times \ldots \times B_n \in \mathcal{H}\}$

Entonces $\mathcal{H}_1$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, la cual contiene a los intervalos de la forma $(-\infty, x]$, donde $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}$.

Así que, $\mathcal{H}$ contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$.

■

Teorema 1. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por cualquiera de las siguientes familias de conjuntos:*

$\mathcal{D}_0$: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma:

$(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, *donde* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{D}_1$: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma:

$(-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \cdots \times (-\infty, x_n)$, *donde* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{D}_2$: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma;

$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]$, *donde* $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{D}_3$: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma:

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, *donde* $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{D}_4$: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma:

$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$, *donde* $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{D}_5$: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma:

$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, *donde* $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Demostración

Vamos a demostrar que se tienen las siguientes contenciones:

$$\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_0\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_1\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_2\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_3\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_4\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_5\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_0\right) \subset \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

a) La σ-álgebra generada por $\mathcal{D}_0$ es la σ-álgebra $\mathcal{H}$ definida en la proposición 1, en la cual demostramos que $\mathcal{H}$ contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$.

En particular, $\mathcal{H}$ contiene a cualquier celda en $\mathbb{R}^n$, así que contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}^n$; es decir, $\sigma\left(\mathcal{D}_0\right) \supset \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

b) Sea $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n] \in \mathcal{D}_0$, entonces:

$(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$

$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(-\infty, x_1 + \frac{1}{m}\right) \times \left(-\infty, x_2 + \frac{1}{m}\right) \times \cdots \times \left(-\infty, x_n + \frac{1}{m}\right) \in \sigma\left(\mathcal{D}_1\right)$.

Así que, $\sigma\left(\mathcal{D}_0\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_1\right)$.

c) Sea $(-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \cdots \times (-\infty, x_n) \in \mathcal{D}_1$, entonces:

$(-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \cdots \times (-\infty, x_n)$

$= \bigcup_{m=1}^{\infty} (-m, x_1 - \frac{1}{m}] \times (-m, x_2 - \frac{1}{m}] \times \cdots \times (-m, x_n - \frac{1}{m}] \in \sigma\left(\mathcal{D}_2\right)$.

Así que, $\sigma\left(\mathcal{D}_1\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_2\right)$.

d) Sea $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n] \in \mathcal{D}_2$, entonces:

$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]$

$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(a_1, b_1 + \frac{1}{m}\right) \times \left(a_2, b_2 + \frac{1}{m}\right) \times \cdots \times \left(a_n, b_n + \frac{1}{m}\right) \in \sigma\left(\mathcal{D}_3\right)$.

Así que, $\sigma\left(\mathcal{D}_2\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_3\right)$.

e) Sea $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \in \mathcal{D}_3$, entonces:

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$

$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[a_1 + \frac{1}{m}, b_1\right) \times \left[a_2 + \frac{1}{m}, b_2\right) \times \cdots \times \left[a_n + \frac{1}{m}, b_n\right) \in \sigma\left(\mathcal{D}_4\right)$.

Así que, $\sigma\left(\mathcal{D}_3\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_4\right)$.

f) Sea $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) \in \mathcal{D}_4$, entonces:

$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$

$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[a_1, b_1 - \frac{1}{m}\right] \times \left[a_2, b_2 - \frac{1}{m}\right] \times \cdots \times \left[a_n, b_n - \frac{1}{m}\right] \in \sigma\left(\mathcal{D}_5\right)$.

Así que, $\sigma\left(\mathcal{D}_4\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_5\right)$.

g) Cualquier celda en $\mathcal{D}_5$ es un conjunto de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$, y, de acuerdo con la proposición 1, cualquiera de estos conjuntos pertenece a $\sigma\left(\mathcal{D}_0\right)$.

Así que, $\sigma\left(\mathcal{D}_5\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_0\right)$.

h) Todo elemento de $\mathcal{D}_0$ es un conjunto boreliano de $\mathbb{R}^n$; así que $\sigma\left(\mathcal{D}_0\right) \subset \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Por lo tanto:

$\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_0\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_1\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_2\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_3\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_4\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_5\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_0\right) \subset \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$

De lo cual se sigue que:

$$\sigma\left(\mathcal{D}_0\right) = \sigma\left(\mathcal{D}_1\right) = \sigma\left(\mathcal{D}_2\right) = \sigma\left(\mathcal{D}_3\right) = \sigma\left(\mathcal{D}_4\right) = \sigma\left(\mathcal{D}_5\right) = \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

■